

实验指导：计算机断层扫描图像

教学目的和要求：

通过计算机断层扫描图像问题，使学生：

1. 了解可以用线性代数与几何的知识来解决这种类型的重要问题；
2. 了解计算机断层扫描图像生成的原理；
3. 了解线性代数与高维几何之间的关系；
4. 体验利用代数与几何的思想、方法，来分析和解决实际问题的过程；
5. 激发学生学习数学以及进行探究性学习的兴趣。

知识点： 点积 线性方程组 投影 线积分

必备技能：

1. 求解线性方程组
2. 求多元函数的最小值

主要内容

1. 应用场景
2. CT 扫描仪的数学模型
3. 代数重建算法
 - 3.1 由投影进行重建的方法
 - 3.2 平面代数重建算法
 - 3.3 空间代数重建算法
4. 任务

“你最喜欢的抽象数学总有一天能找到在实际生活中的应用”这个论点，已经在我们解决X光CT问题的过程中得到了最好的证明

—— 劳伦斯夏普 1983. 3

1. 应用场景

计算机 X 射线断层扫描技术 (CT) 为它的创造者——EMI 公司的亨斯菲尔德 (G. N. Hounsfield) 和塔夫茨大学的科马克 (Allan M. Cormak)——赢得了 1979 年的诺贝尔医学奖 [Gelfand and Gindikin 1990, 1]。CT 技术只需在物体的外围测量，而不需要进入物体的内部，就可以直接绘制出物体内部的图像。举例来说，CT 医学扫描仪和核磁共振都是在外部通过 X 射线或电磁波对患者大脑进行测量；通过计算能直接建立大脑的图像模型。扫描仪不拍摄任何照片，而是计算图片。CT 技术不仅应用在医学方面，在工业无损监测、农林业、生态环境检测、地球物理等方面都得到了广泛应用，CT 已经由第一代发展到了第五代。

2. CT 扫描仪的数学模型

下面的描述从物理上揭示了线积分和扫描仪中 X 射线测量之间的关系。

X 射线由大量的光子组成，这些光子沿着直线 $L_{r,a}$ 传播，该直线到光源的距离为 r ，直线 $L_{r,a}$ 的法方向为 \vec{a} ，在直线 $L_{r,a}$ 上位置 s 的任一个点 \vec{x} ，如果有 $N(s)$ 数量的光子在 s 处撞击物体，沿着直线 $L_{r,a}$ 的方向穿透 h 的长度，那么物体将会吸收一部分光子并让剩余光子 $N(s+h) < N(s)$ 穿过，在 $s+h$ 穿出。光子被吸收的比例近似于密度 $f(\vec{x}(s))$ 和物体厚度 h 的积。

$$\frac{N(s) - N(s+h)}{N(s)} \approx f(\vec{x}(s)) \cdot h,$$

即：

$$\frac{N(s+h) - N(s)}{h \cdot N(s)} \approx -f(\vec{x}(s)),$$

当 h 趋于 0 时等号成立，即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(s+h) - N(s)}{h \cdot N(s)} = -f(\vec{x}(s)),$$

$$\frac{N'(s)}{N(s)} = -f(\bar{x}(s))$$

等式两端在 X 射线穿透的入点和出点间积分得到，

$$\ln(N(out)) - \ln(N(in)) = \int_{L_{r,a}} -f(\bar{x}(s)) ds ,$$

$$\ln\left(\frac{N(in)}{N(out)}\right) = (\mathcal{R}f)(r, a).$$

因此，如果 CT 扫描仪测量了 X 射线在穿透前的强度 $N(in)$ ，和穿透后的强度 $N(out)$ ，那么扫描仪可以得到 $\ln(N(in)/N(out))$ ，即组织密度 f 沿着 X 射线的 Radon 变换的值 $(\mathcal{R}f)(r, a)$ 。然后扫描仪的计算机必须计算出在身体的各个地方 \bar{x} 的密度值 $f(\bar{x})$ 。当然必须有人编程来达到这个效果，正如下面所讲的一样。

3. 代数重建算法

这一节从线性代数角度介绍计算机断层扫描问题，无需微积分的预备知识。

3.1 由投影进行重建的方法

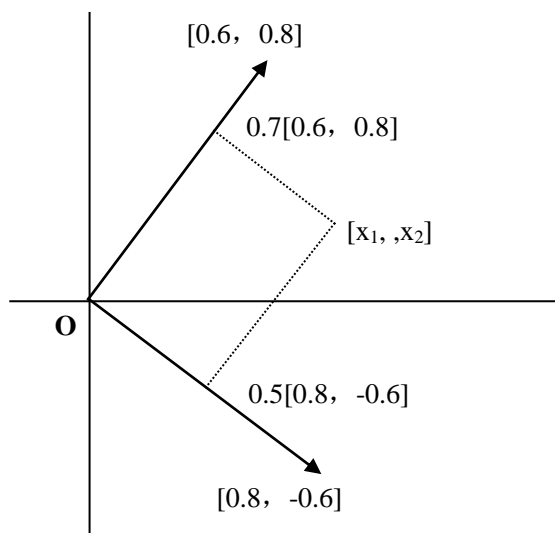


图 1. 从点在两条直线上的投影重构出平面内的这一点

一个点 (x_1, x_2) 在平面的坐标 x_1 和 x_2 是点 (x_1, x_2) 在坐标轴上的正交投影，从这个点 (x_1, x_2) 的正交投影 x_1 和 x_2 重建这个点 (x_1, x_2) 相当于解下述平凡的线性方程组

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1, \\x_2 &= x_2\end{aligned}$$

将这推广至所有的线性方程组。

如图 1 所示, 点 $[x_1, x_2]$ 在方向向量 $[0.6, 0.8]$ 和 $[0.8, -0.6]$ 上的正交投影分别为 0.7 和 0.5, 则

$$\begin{aligned}\langle (0.6, 0.8), (x_1, x_2) \rangle &= 0.6x_1 + 0.8x_2 = 0.7 \\ \langle (0.8, -0.6), (x_1, x_2) \rangle &= 0.8x_1 - 0.6x_2 = 0.5\end{aligned}$$

其中 \langle, \rangle 表示点积, 由该方程组可解出 x_1 值为 0.82, x_2 值为 0.26。这个解相当于用它的正交投影 0.7 和 0.5 重建这个点 $[x_1, x_2]$ 。

类似地, 解决任何一个线性方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$ 相当于用 \vec{x} 在以矩阵 A 的行向量为方向向量的线上的伸缩正交投影来重建空间中的这个点 \vec{x} , 其中矩阵 A 的行不必是标准正交的。

3.2 平面代数重建算法

CT 断层扫描仪发射穿过患者身体横截面的 X 射线。然后扫描仪的测量工具比较 X 射线穿透人体前的强度和 X 射线穿过人体后的强度。因为患者体内的各种组织吸收了一些 X 射线的能量, 所以 X 射线穿过人体后的强度 I_{out} 比它在进入人体前的强度 I_{in} 低: $I_{out} < I_{in}$ 。比率 I_{out} / I_{in} 只含扫描仪测量的数据, 且在患者体外测量。根据这些数据, 扫描仪制造商必须设计一个算法, 使用该算法可以生成显示患者人体组织的图片。因为 X 射线的吸收量依赖于 X 射线穿过的物质总质量, 扫描仪的电脑必须解一个方程组来计算患者身体任意位置的物质密度, 进而生成用于医疗诊断的图片。

图2说明了数学在计算机断层扫描中所起的作用。在这个三角形中, 这三个圆分别代表三个已知位置的内部器官, 直线表示X射线。设三个内部器官的质量分别为 x_1, x_2, x_3 , 它们是未知的。一般, 每一条X射线穿透不止一个器官。例如, 沿 L_{12} 穿行的X射线穿过质量分别为 x_1 和 x_2 的器官, 其总质量为 $x_1 + x_2$, 它们吸收一定强度的X射线。通过测量吸收的强度, 可以得到射线通过的总质量 B_{12} 。因此, $x_1 + x_2 = B_{12}$ 。这同样也适应于其他直线, 所以可以得出下列线性方程组

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= B_{12}, \\x_2 + x_3 &= B_{23}, \\x_1 + x_3 &= B_{31}\end{aligned}$$

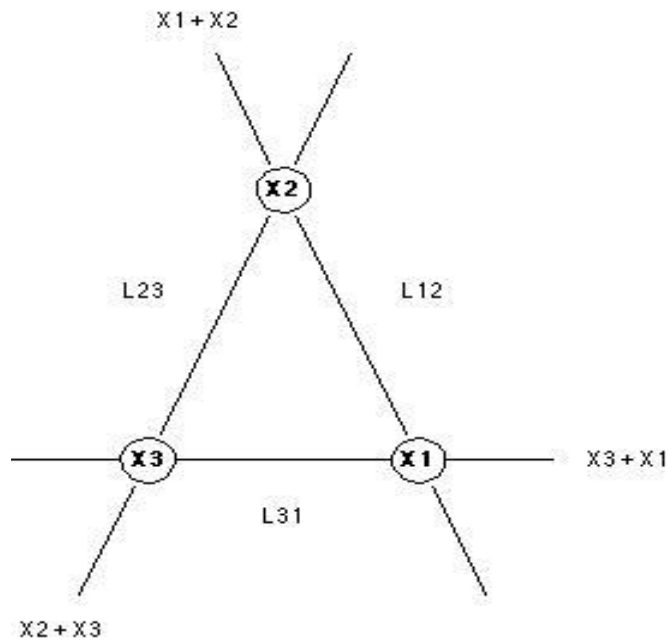


图 2. 三个圆圈代表三个未知质量 X_1, X_2, X_3 . 直线 L_{12}, L_{23}, L_{31} 代表三条穿过这些未知质量的 X 射线. $X_1 + X_2, X_2 + X_3, X_3 + X_1$ 为三条 X 射线穿过的物质质量。

因为这个方程组仅仅只有一个解, 所以观测得到吸收量 (B_{12}, B_{23}, B_{31}) 后, 再解出这个线性方程组可得出这些质量 (X_1, X_2, X_3)。

对于医疗诊断而言, 计算机断层扫描不仅要在这三个位置, 而且要在每一个器官中成千上万个位置计算组织的密度, 而每条 X 射线要穿过许多这样的点。因此可以得到含成千上万个未知数的成千上万个方程的线性方程组。用未知数 x_n 表示第 n 个选取的点的密度 (或者, 可以更准确的说是“线性吸收系数”)。这个问题的解答不仅涉及到线性代数, 而且涉及研究生水平的数学。

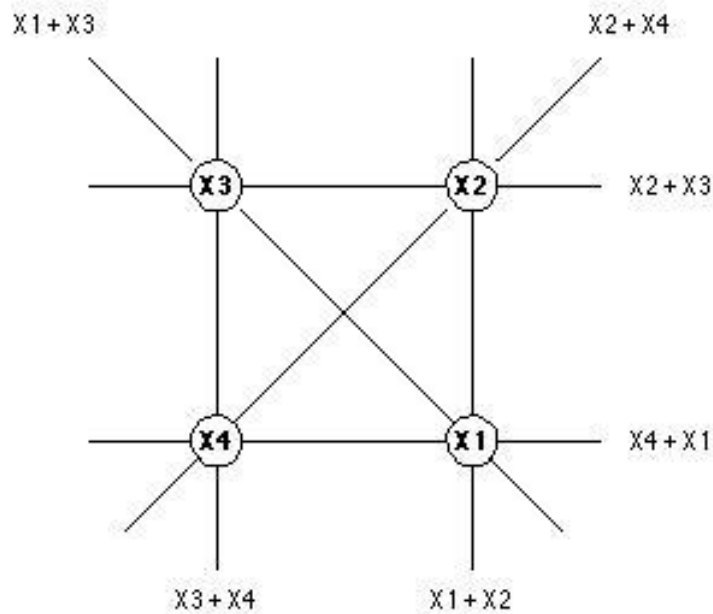


图 3. 四个圆圈代表未知质量 X_1, X_2, X_3, X_4 ，这些直线代表穿过这些物质的六条 X 射线。断层图像问题需要设计一个方法根据测量值来计算出 X_1, X_2, X_3, X_4 。

实际上，四个点的情况就产生了许多问题，如图 3 所示，因为是 6 条 X 射线穿过它们，而不是 4 条。然而 6 个方程只有 4 个未知数，所以这个方程组很可能无解。而且，从 6 条 X 射线中只选 4 条，仍可能会得到一个无解的矛盾方程组。

练习题

1. 如例 2 中一样，且和图 2 中的位置一样。假设扫描仪得到了观测值 $B_{12} = 0.9$, $B_{23} = 0.5$ 和 $B_{31} = 0.8$ 。计算吸收量 X_1, X_2, X_3 。
2. 如例 2 中一样，且和图 2 中的位置一样。假设扫描仪得到了观测值 $B_{12} = 0.9$, $B_{23} = -0.4$ 和 $B_{31} = 0.9$ 。计算吸收量 X_1, X_2, X_3 。

3.3 空间代数重建算法

与测量平面中沿着直线穿行的 X 射线的 CT 扫描仪形成不同，核磁共振扫描仪测量空间中跨域平面的电磁场；但是它们两者的算法是一样的。例如核磁共振扫描仪生成的图像（在医学中也称为磁共振成像）。

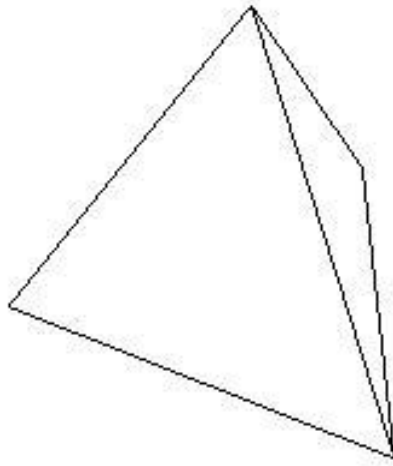


图 4. 四面体有四个定点，六条边，四个三角形的面。

例如，考虑空间中的四个未知质量 X_1, X_2, X_3, X_4 。一般，它们确定四个穿过它们的平面。（四个不共面的物质分别位于一个四面体的顶点上，该四面体有四个三角形平面，见图 4）用 i 标记不含 X_i 的平面 P_i 和观测值 B_i ，核磁共振的一个观测值相当于该平面三质量的总合：

$$x_2 + x_3 + x_4 = B_1 \text{ (通过 } x_2, x_3, x_4 \text{ 的平面 } P_1 \text{ 的总和),}$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = B_2 \text{ (通过 } x_1, x_3, x_4 \text{ 的平面 } P_2 \text{ 的总和),}$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = B_3 \text{ (通过 } x_1, x_2, x_4 \text{ 的平面 } P_3 \text{ 的总和),}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = B_4 \text{ (通过 } x_1, x_2, x_3 \text{ 的平面 } P_4 \text{ 的总和),}$$

这四个量仅仅可以作为解释核磁共振扫描仪本质的一个原型。为了使产生的图片拥有足够高的精确度和清晰度来用于医疗诊断，它需要成千上万个点，从这些点可以列出一个具有成千上万个方程的方程组。

有一种与以上不同的算法已经被证明对通用计算机断层扫描更有效。该方法是基于多变量微积分和相关数学原理的。还有其他的计算机断层扫描方法，例如，用一个不仅在平面内，而且穿过一个三维空间的 X 射线。

4. 课外任务

如图 5 所示, 有 12 束 X 射线按图示方向通过 9 个小正方形, 测得 12 条射线通过的物质质量分别为 B_1, B_2, \dots, B_{12} .

- 1) 试建立这 9 个小正方形质量所满足的线性方程组, 并判断方程组是否有解, 若有解, 解是否唯一;
- 2) 将方程组写成矩阵形式;
- 3) 由于测量数据有误差, 且建方程模型时作了一些近似处理, 方程组经常会出现无解的情形, 此时, 应该如何求出近似满足方程的解使近似程度尽可能高?

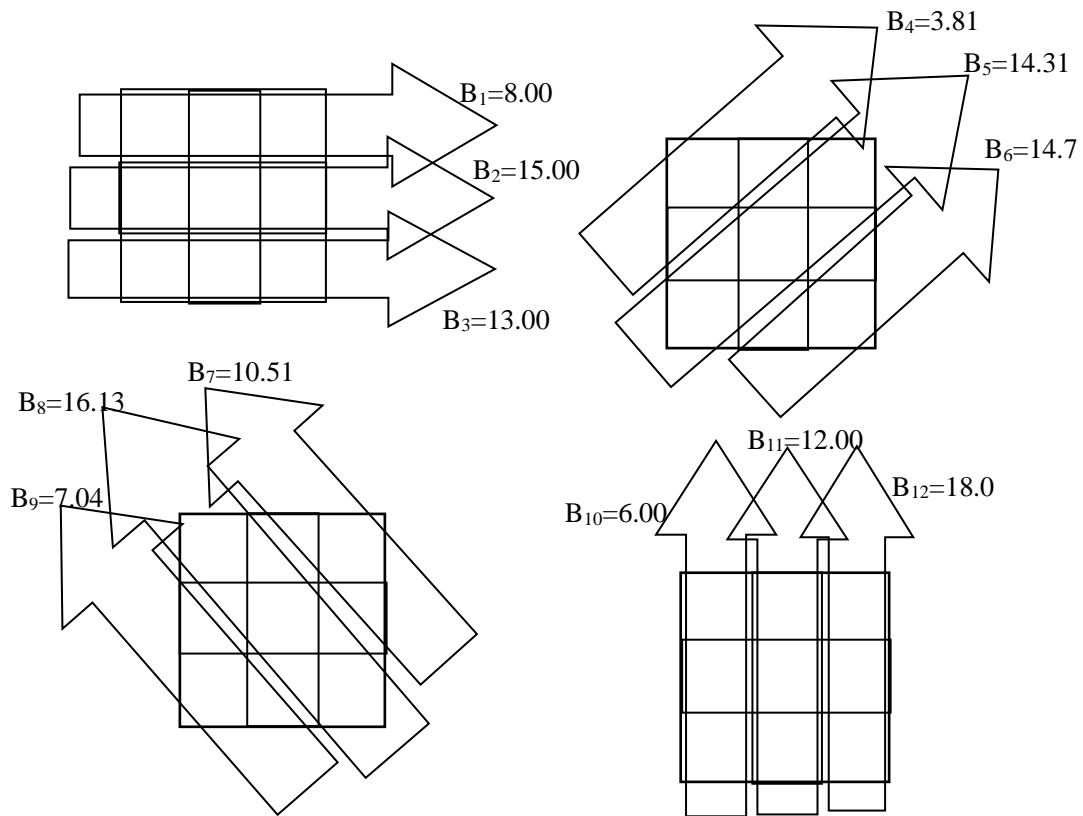


图 5 通过 9 个小正方形的 12 条 X 射线束及其通过的物质质量